Matière : Mathématiques.

Durée : 2h

Enoncé :

Exercice :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-\sqrt{3}i)z-i=0$$

1) a) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E)

b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z : $z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-\sqrt{3}i)z-i=(z-i)(z^2+az+b)$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2+\sqrt{3}z+1=0$.

b) En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.

3) On considère le point A d'affixe $z_A=i$, le point B d'affixe $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ et le point C d'affixe z_C, symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

a) Représenter sur un même graphique les points A, B et C.

b) Déterminer le module et un argument du quotient : $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

c) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC.

Problème :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie, pour tout x, par $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$

2) Etudier le sens de variation de g. Calculer $g(0)$. Déduire des variations de g le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) a) Calculer $\int_0^x 2te^{2t}dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire une primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0.

Partie B : Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie, pour tout x par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.

On appelle (C) sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f et déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (le signe de $f'(x)$ pourra être obtenu à partir de A).

2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est asymptote à (C) lorsque x tend vers $-\infty$.

Etudier suivant les valeurs de x, la position relative de (D) et de (C).

3) a) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on appellera I et J (I ayant une abscisse inférieure à celle de J).

b) Déterminer et justifier un encadrement d'amplitude 0,1 de l'abscisse de J.

4) Tracer la courbe (C) et de la droite (D).

CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAU
SESSION DE MAI 2005

FILIERE ARCHITECTURE - URBANISME

EPREUVE DE MATHEMATIQUE GENERALE

Durée : 2 heures

I - Soient a et b deux nombres complexes, $z^2-2az+b=0$ une équation de racines z_1 et z_2

1) Calculer $z_1.z_2$ et z_1+z_2
2) On suppose $z_1 = iz_2$. Calculer z_2^2 de deux façons différentes et en déduire une relation entre a et b.

II - On considère l'expression $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 8x + 4$

1) Calculer $P(1)$, $P(-1)$ et $P(2)$.
2) Déterminer les réels a et b pour que
   $P(x) = a(x-1)^2(x-2)^2(x+b)$
3) On pose $F(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$

   a) Quel est le domaine de D_F ?

   b) Calculer $P'(x)$ à partir de la 2ème question et mettre $F(x)$

   sous la forme $F(x) = \dfrac{a_1}{x-1} + \dfrac{a_2}{x+1} + \dfrac{a_3}{x-2}$

   en précisant les réels a_1, a_2 et a_3.

III - Soit la fonction $f : x \to xe^{\frac{1}{1-x^2}}$

1) Déterminer le domaine D_f et étudier la parité de f.
2) Calculer et simplifier $f'(x)$ et $f''(x)$.
3) En déduire l'existence de 3 points d'inflexion dont 2 sont symétriques par rapport à l'origine O du repère et calculer les ordonnées de ces points.
4) Compléter l'étude de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$ en repère orthonormé en précisant asymptotes et ½ tangentes s'il y en a.

CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAU
SESSION DE MAI 2005

FILIERE TECHNICIEN SUPERIEUR EN GESTION URBAINE

EPREUVE DE MATHEMATIQUE GENERALE

Durée : 2 heures

I Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, $z \neq 0$

1) A, B et C sont images des complexes z, iz et $(2-i) + z$
   a) Calculer les longueurs AB, AC et BC.
   b) En déduire que $\forall z$, le triangle ABC est isocèle non équilatéral.

2) Déterminer z tel que $|z| = \left|\frac{2+i}{z}\right| = |z-1|$

3) Soit Z un complexe tel que $\frac{Z-1}{Z+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$

   a) Exprimer Z en fonction de z.
   b) Que peut-on dire des points images de Z, z et $\frac{1}{z}$?

II On considère la fonction f : $x \to \frac{1+\ln x}{x}$

1) Etudier f et construire sa courbe $\mathscr{C}$ en repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit (D) une droite.
   a) (D) rencontre $\mathscr{C}$ en un point M_1 d'ordonnée nulle.
   Calculer l'abscisse x_1 de M_1.
   b) (D) passe par O et est tangente à $\mathscr{C}$ en M_2.
   Calculer les coordonnées x_2 et y_2 de M_2.
   c) (D) est tangente à $\mathscr{C}$ en M_3 et est parallèle à (ox).
   Calculer les coordonnées x_3 et y_3 de M_3.
   d) (D) rencontre $\mathscr{C}$ en M_4, point d'inflexion de $\mathscr{C}$;
   calculer l'abscisse x_4 de M_4.
   e) Quelle est la nature de la suite x_1, x_2, x_3 et x_4 ?